# DEVOIR NUMÉRO 2 VERSION A

ECG2 MATHS APPLIQUÉES

**Exercice 1** **EDHEC** 2026 Exercice 1.

On considère un réel $a$ strictement supérieur à 1, ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 = a$ et par la relation de récurrence, valable pour tout entier naturel $n$ :

$$u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1.$$

**1.** Compléter la fonction Python suivante afin qu'elle retourne la valeur de $u_n$ pour des valeurs données de $n$ et $a$.

```
def suite_u(n,a) :
  u = .....
  for k in range(1,n+1) :
    u = .....
  return u
```

**2.** Montrer que si l'on suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors sa limite est $\ell = 1$.

**3.** **a.** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

**b.** En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant a$.

**c.** Conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

**4.** À l'aide de la définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de la question précédente, préciser laquelle des quatre propositions suivantes est vraie et justifier l'équivalent choisi :

❶ $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$ ❷ $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n^2$ ❸ $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{u_n^2}$ ❹ $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{u_n}$

**5.** **a.** Justifier que pour tout entier naturel $n$, $\frac{1}{u_n-1} - \frac{1}{u_{n+1}-1}$ existe et montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} = \frac{1}{u_n}.$$

**b.** En déduire, pour tout entier naturel $n$, $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k}$ en fonction de $a$ et de $u_{n+1}$

**c.** Conclure que la série de terme général $\frac{1}{u_n}$ converge et donner sa somme en fonction de $a$.

*Dans toute la suite, on suppose que $a = 2$.*

**6.** **a.** Montrer que l'on définit bien une variable aléatoire $X$ telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{u_n}.$$

**b.** Montrer que pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2, on a $2^n(2^n - 1) + 1 \geqslant 2^{n+1}$.

**c.** En déduire que, pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 2, on a l'inégalité $u_n \geqslant 2^n$ puis vérifier que cette inégalité reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$.

**d.** Établir que $X$ possède une esppérance et une variance que l'on ne cherchera pas à calculer.

---

*Date*: 17 Octobre 2026 8h30-12h30.

http://louismerlin.fr.

**Exercice 2** **EML** 2026 Exercice 2.

On considère l'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre deux à coefficients réels muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ où

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On appelle *trace* et *déterminant* les applications $\mathrm{tr} : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ et $\det : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définies, pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par

$$\mathrm{tr}(M) = a + d \quad \text{et} \quad \det(M) = ad - bc.$$

## Partie A : Un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

**1.** Montrer que l'application tr est linéaire.

On définit une application $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ en posant, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$\varphi(M) = \mathrm{tr}(M)I - M,$$

où $I$ désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_2(R)$.

**2.** **a.** Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

**b.** Vérifier que $\varphi(I) = I$.

**c.** Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, montrer que $\mathrm{tr}\,(\varphi(M)) = \mathrm{tr}(M)$.

**3.** **a.** Déterminer la matrice $A$ de $\varphi$ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

**b.** Calculer $A^2$. En déduire que $A$ est inversible et donner son inverse.

**c.** Résoudre les deux systèmes $AX = X$ et $AX = -X$ d'inconnues $X \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

**d.** Montrer que pour un nombre réel $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, le système $AX = \lambda X$ n'a pas de solution non triviale.

## Partie B : Deux formules d'inversion.

**4.** Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, exprimer $\varphi(M)$ comme un tableau de nombres puis établir que

$$M\varphi(M) = \det(M)I.$$

**5.** **a.** Déduire de cette égalité que $M$ est inversible si et seulement si $\det(M) \neq 0$ et que, dans ce cas,

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}\varphi(M).$$

**b.** Soit $M$ et $N$ deux matrices inversibles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $M + N$ soit inversible. Montrer que

$$(M+N)^{-1} = \frac{\det(M)}{\det(M+N)}M^{-1} + \frac{\det(N)}{\det(M+N)}N^{-1}.$$

## Partie C : Polynômes de Tchebychev et trace des matrices de déterminant 1.

On note $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des polynômes de Tchebychev définie par ses deux premiers termes

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_0(x) = 0 \quad \text{et} \quad P_1(x) = 1$$

et la relation de récurrence, valable pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_{n+1}(x) = xP_n(x) - P_{n-1}(x).$$

**6.** **a.** Déterminer les polynômes $P_2$ et $P_3$.

**b.** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\deg(P_n) = n - 1$.

**7.** Soit $M$ une matrice de déterminant 1, c'est-à-dire avec $\det(M) = 1$.

On définit une suite de nombres réels en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = P_n(\mathrm{tr}(M)).$$

**a.** À l'aide de l'identité établie en question **4**, montrer que

$$M^2 = \mathrm{tr}(M)M - I.$$

**b.** Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$M^n = -a_{n-1}I + a_n M \quad (\star).$$

**c.** En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $Q_n$ tel que :

$$\mathrm{tr}(M^n) = Q_n(\mathrm{tr}(M)).$$

Exprimer $Q_n$ à l'aide des polynômes de Tchebychev.

**8.** **a.** Compléter la fonction Python "P(n,x)" ci-dessous qui prend en argument un entier naturel $n$ et réel $x$ et qui renvoie le nombre $P_n(x)$. Vous pouvez utiliser autant de lignes que vous le souhaitez dans le boucle "for".

```
def P(n,x) :
  P0 = 0
  P1 = 1
  for k in range(1,n+1) :
    .....
    .....
    .....
  return P0
```

**b.** En utilisant la fonction "P(n,x)" ainsi que l'identité $(\star)$ ci-dessus, rédiger une fonction Python "Puissance(n,M)" qui prend en argument un entier $n \geqslant 1$ et une matrice $M$ de déterminant 1, et qui renvoie la matrice $M^n$. On suppose la matrice $M$ construite à l'aide de la commande "np.array"

**Rappel Python** : la commande "np.eye(2)" renvoie la matrice identité d'ordre 2.

## Exercice 3 **ECRICOME** 2010 Exercice 3.

Dans cet exercice, on étudie des situations probabilistes liées à un jeu de dé à 6 faces. Pour ce jeu, effectuer une partie consiste à lancer successivement deux dés équilibrés. On note :

- $D_1$ le résultat du premier dé et $D_2$ le résultat du deuxième dé.
- $E_1$ l'événement $[D_1 < D_2]$, $E_2$ l'événement $[D_1 = D_2]$ et $E_3$ l'événement $[D_1 > D_2]$-

Lors d'une partie,

- si l'événement $E_1$ se produit alors le joueur ne marque pas de point,
- si l'événement $E_2$ se produit alors le joueur marque 2 points,
- si l'événement $E_3$ se produit alors le joueur marque 1 point.

### I. Étude de parties successives.

Soit $n$ un entier naturel non nul. Le joueur joue successivement $n$ parties. Pour tout entier naturel $i \geqslant 1$, on note

- $X_i$ la variable aléatoire représentant le nombre de points marqués lors de la $i$-ème partie.
- $Y_i$ le nombre de points marqués après $i$ parties.

**1.** Calculer la probabilité de chacun des événements $E_1$, $E_2$ et $E_3$.

**2.** Soit $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, déterminer la loi de la variable $X_i$, puis calculer son espérance et sa variance.

**3.** Trouver la loi de la variable aléatoire $Y_1$.

**4.** Quelle est la loi de la variable aléatoire $Y_2$.

**5.** **a.** Préciser l'ensemble $Y_3(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire $Y_3$.

**b.** Pour chaque couple d'entiers $i \in Y_2(\Omega)$ et $j \in Y_3(\Omega)$, donner la valeur de $\mathbb{P}(Y_2 = i \cap Y_3 = j)$
*On justifiera précisément une valeur non nulle de ces probabilités, les autres pouvant être données directement*

**c.** En déduire la loi de la variable $Y_3$.

**6.** **a.** Écrire $Y_n$ en fonction des variables aléatoires $X_1, X_2, \cdots, X_n$.
En déduire l'espérance mathématique et la variance de $Y_n$.

**b.** En moyenne, combien de parties au minimum doit faire le joueur pour obtenir plus de 10 points ?

## II. Étude du temps d'attente.

Le joueur joue maintenant jusqu'à ce qu'il dépasse un nombre de points donné. Plus précisément, on note $T_1$ (respectivement $T_2$) la variable aléatoire représentant le nombre de parties effectuées par le joueur lorsque le total de ses points est supérieur ou égal à 1 (respectivement 2) pour la première fois (si cet événement se produit). Par exemple, si les points marqués par le joueur sont dans l'ordre

**exemple 1 :** 0 0 1 0 1 2 ..., alors $T_1 = 3$ et $T_2 = 5$

**exemple 2 :** 0 0 0 2 1 2 ..., alors $T_1 = 4$ et $T_2 = 4$

**7.** **a.** Préciser l'ensemble $T_1(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire $T_1$ puis, pour tout $k$ appartenant à $T_1(\Omega)$, donner la valeur de la probabilité $\mathbb{P}([T_1 = k])$.

**b.** Donner la valeur de l'espérance et de la variance de la variable aléatoire $T_1$.

**8.** **a.** Déterminer l'ensemble $T_2(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire $T_2$.

**b.** Calculer les probabilités $\mathbb{P}([T_2 = 1])$ et $\mathbb{P}([T_2 = 2])$

**c.** Prouver que pour tout $k \geqslant 3$, on a

$$\mathbb{P}([T_2 = k]) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} + (k-1)\frac{7}{12}\left(\frac{5}{12}\right)^{k-1}.$$

**d.** Ce résultat est-il valable pour $k = 1$ et $k = 2$ ?

**e.** Établir que $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([T_2 = k]) = 1$.

**f.** Que peut-on en déduire pour l'événement "le joueur n'obtient jamais un score cumulé supérieur ou égal à 2" ?

**g.** Calculer $E(T_2)$.